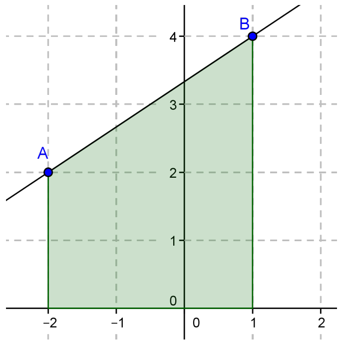
# Intégrale d'une fonction : Exercices

**Intégrale et aire**

On considère la fonction affine $f$ dont la courbe ci-contre passe par les points A et B.

1) Déterminer l'expression de $f(x)$.
2) En déduire une primitive F de $f$.
3) a) Déterminer l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide de F.
   En déduire l'aire du domaine vert.
   b) Déterminer l'aire du domaine vert d'une autre façon.

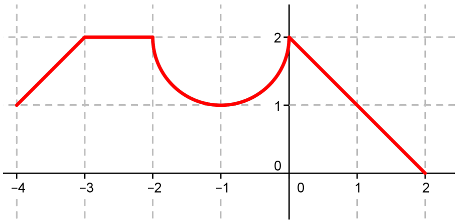



---

**Intégrale et aire**

On a tracé la courbe d'une fonction $f$ définie sur [-4 ;2].
Sur [-2 ;0], la courbe est un demi-cercle.

1) Déterminer $\displaystyle\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$
2) En déduire $\displaystyle\int_{-4}^{2} f(x)\mathrm{d}x$




---

**Calcul intégral - Intégrale d'un polynôme - $x^n$**

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x^5 - x^2 - 1 \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{0}^{-1} (1-t^2)(2+3t)\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{2}{3}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x$

---

**Intégrale et primitive d'un quotient - $\dfrac{u'}{u}$**

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{6x^2+4x-1}{x}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{3t} - \frac{3}{t^2}\mathrm{d}t$

---

**Intégrale et primitive avec des exponentielles ou des racines - $u'e^u$ - $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$**

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{-x} + \frac{6}{e^{2x}}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{3}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$

---

**Intégrale et primitive d'un quotient - $\dfrac{u'}{u}$**

Calcul intégral avec un quotient de polynôme :

1) Étudier suivant les valeurs du réel $x$, le signe de $x^2+2x+5$.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$

---

**Intégrale et primitive**

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} x-1\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{5}^{2} \frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} e^{2t-1}\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+x-1}{4}\mathrm{d}x$

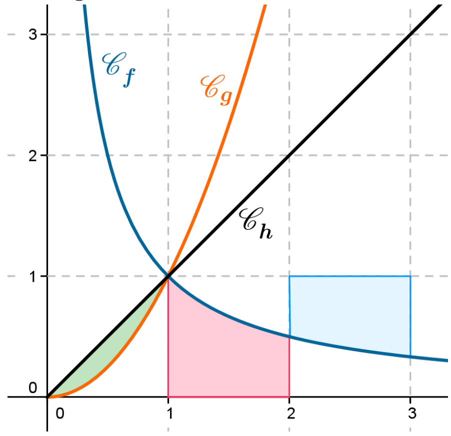
e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$ g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{t^2-2t+3}{t}\mathrm{d}t$

---

**Intégrale et aire**

On a tracé la courbe de la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

On a tracé également les courbes des fonctions $g$ et $h$ définies sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2$ et $h(x)=x$.



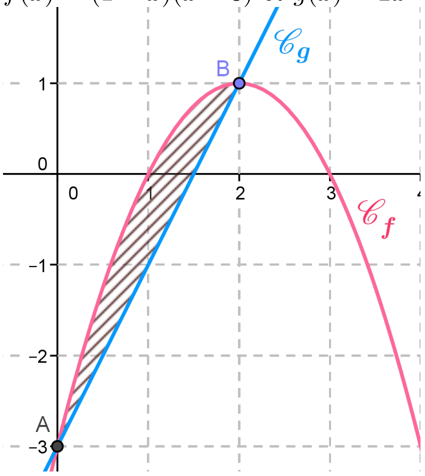

1) Déterminer l'aire du domaine rose.
2) Déterminer l'aire du domaine bleu.
3) Déterminer l'aire du domaine vert.

---

**Intégrale et aire entre deux courbes**

On a représenté les courbes des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (1-x)(x-3)$ et $g(x) = 2x-3$.

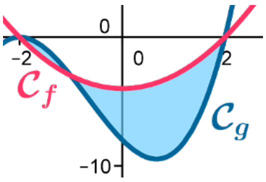



Déterminer l'aire de la surface hachurée.

---

**Intégrale et aire entre deux courbes**

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x+2)^2(x-2)$.



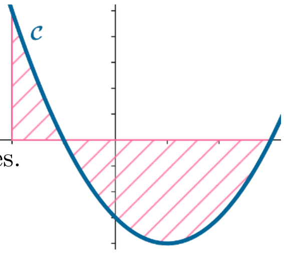

1) Étudier la position relative de leurs courbes représentatives.

2) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine en unité d'aire compris entre les deux courbes sur l'intervalle [-2 ;2].

---

**Intégrale et aire - fonction changeant de signe**

La courbe $\mathcal{C}$ représente dans un repère orthogonal, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Les unités graphiques sont : 1 cm sur l'axe des abscisses et 0.5 cm sur l'axe des ordonnées.



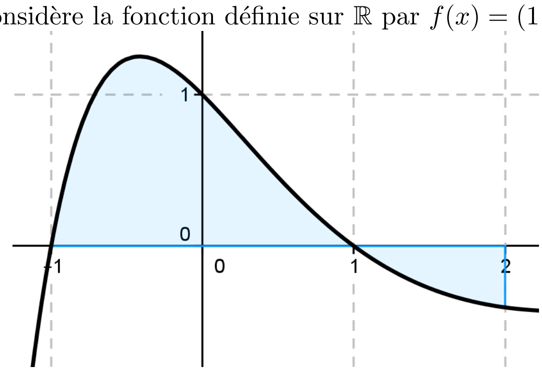

1) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

2) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine en unité d'aire puis en cm$^2$ compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 3$.

---

**Intégrale et aire - fonction changeant de signe**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$ dont on a tracé la courbe ci-dessous :




1) Déterminer $a$, $b$ et $c$ tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de $f$.

2) En déduire l'aire de la surface bleue.

**Fonction définie par une intégrale - signe d'une intégrale**

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $-1$ |

On définit la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le tableau de variations de F.
2) Déterminer le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{-5} f(t)\mathrm{d}t$.
3) Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

---

**Signe d'une intégrale**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

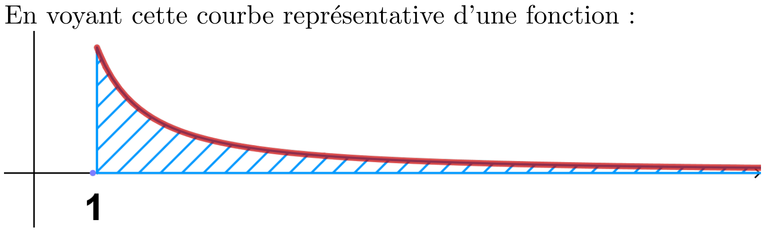
Pour tout réel $x$, on pose $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_3^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Déterminer le signe de $\mathrm{I}(x)$ en fonction de $x$, en justifiant.

---

**Intégrale - Aire finie ou infinie ?**

En voyant cette courbe représentative d'une fonction :



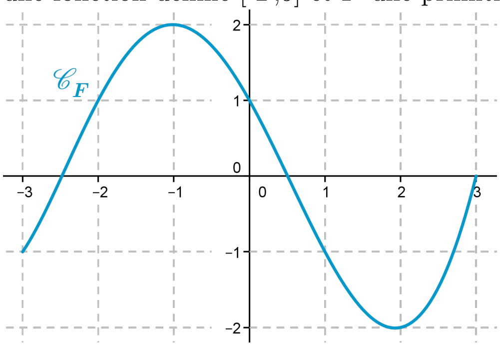

Lætitia affirme que : "Si la fonction représentée tend vers 0 en $+\infty$ alors l'aire hachurée sous la courbe sur $[1;+\infty[$ est finie". Antoine lui répond : "Même si cette fonction tend vers 0 en $+\infty$, la longueur de l'intervalle $[1;+\infty[$ étant infinie, l'aire hachurée ne peut pas être finie".

A l'aide de deux exemples, justifier qu'ils ont tort tous les deux.

---

**Fonction connaissant une primitive**

Soit $f$ une fonction définie [-2 ;5] et $F$ une primitive de $f$. On a tracé la courbe de $F$ ci-dessous :

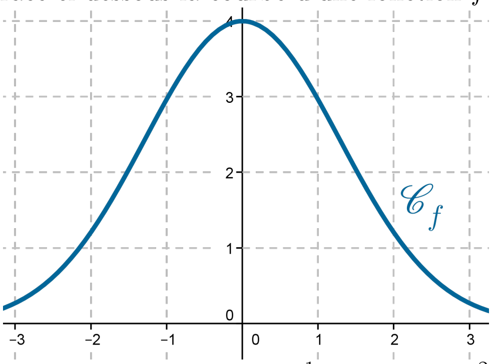



1) Déterminer le tableau de signe de $f$ sur [-2 ;5].
2) Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

---

**Comparer des intégrales**

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.



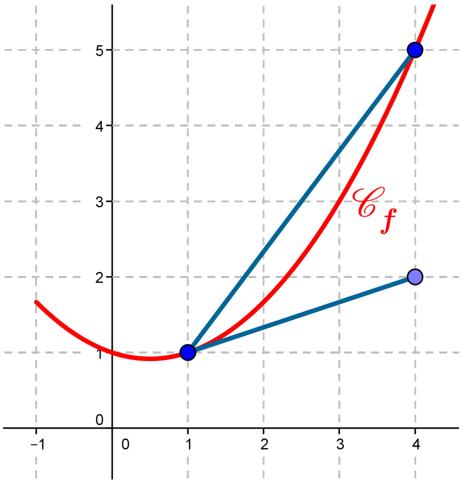

1) Comparer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

2) Comparer les intégrales $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

3) Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\ \mathrm{d}x$.

**Encadrer une intégrale**

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.




Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

---

**Fonction définie par une intégrale**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

1) Justifier que $g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer le tableau de variations de $g$.
3) Déterminer le tableau de signe de $g(x)$.
4) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $g(x) \leq 1$.
5) Démontrer que l'inégalité du 4) reste vraie pour $x \leq 1$.

---

**QCM Intégrale**

$f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

a) $\displaystyle\int_2^{-1} f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_1^{-2} f(x)\ \mathrm{d}x$

b) Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$ alors pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = g(x)$.

c) Si $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ alors pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = 0$.

d) Si $f$ est positive sur [2 ;3] alors $\displaystyle\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$.

e) Si $\displaystyle\int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$ alors pour tout $x \in [2;3]$, $f(x) \geq 0$.

f) $\displaystyle\int_2^3 f'(x)\ f(x)\ \mathrm{d}x = F(3) - F(2)$ où $F = f^2$.

---

**Fonction définie par une intégrale - dérivée - variations**

On considère la fonction $g$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

a) La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) $g'(-1) = 0$

c) $g(-1) = 0$

d) $g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

---

**Inégalité et intégrale**

1) Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) En déduire un encadrement de l'intégrale : $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

---

**Inégalité et intégrale - encadrement de** $\ln x$

1) Démontrer que pour tout réel $t \geq 1$, $\dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

2) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

3) En déduire un encadrement de $\ln 2$. Vérifier la cohérence du résultat à l'aide d'une calculatrice.

---

**Inégalité et intégrale - encadrement de** $\ln 2$

1) Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

2) En déduire que pour réel $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

3) En déduire un encadrement de $\ln 2$. Vérifier la cohérence du résultat à l'aide d'une calculatrice.

---

**Suite définie par une intégrale**

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$,

$f_n$ désigne la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$,

$C_n$ désigne la courbe de $f_n$.

On a tracé $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ dans un repère orthonormé.

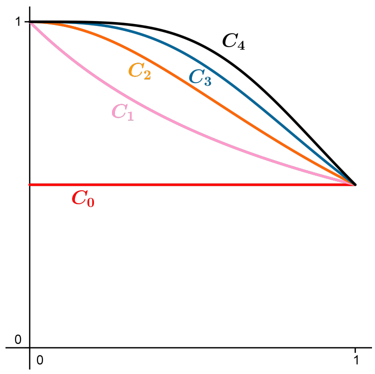
1) A l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de $(u_n)$.

2) Déterminer le sens de variation de $(u_n)$ par le calcul.

3) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, et tout $x \in [0;1]$ :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

4) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.




---

**Suite définie par une intégrale**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

2) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

3) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

---

**Suite définie par une intégrale**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer $u_0$.
2) Démontrer que $(u_n)$ est décroissante.
3) Démontrer que $(u_n)$ est convergente.
4) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
5) Que peut-on déduire ?

---

**Fonction définie par une intégrale - dérivation - variations - limite**

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ .

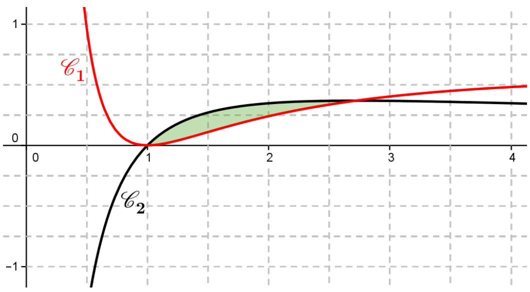
1) Justifier que $f$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, déterminer $f'(x)$ puis les variations de $f$.
2) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.
3) Démontrer que pour tout réel $t \in ]0;+\infty[$, $\dfrac{e^t}{t} \geq \dfrac{1}{t}$.
4) Déduire du 3) que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \geq \ln x$.
5) Déduire du 3) que pour tout $x \in ]0;1]$, $f(x) \leq \ln x$.
6) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

---

**Intégrale et aire entre deux courbes**

On se place dans un repère orthogonal d'unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On a tracé les courbes de 2 fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.




1) Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond. Justifier.
2) Déterminer les positions relatives des courbes de $f$ et $g$ par le calcul.
3) Déterminer une primitive de $f$ puis de $g$ sur $]0;+\infty[$.
4) Déterminer l'aire du domaine vert en unité d'aire puis en cm$^2$.

---

**Intégrale et primitive**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$.

Soit $u$ et $v$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

---

**D'après sujet Bac Pondichéry 2015 Terminale S**

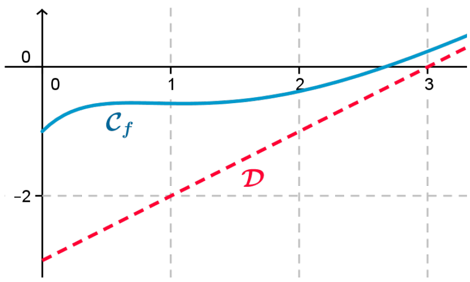
Soit $f$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ et $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction $h$ est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que $H$ est une primitive de $h$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a$ un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan définis par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

---

**Baccalauréat 2014 - Amérique du Nord exercice 2**
**Intégrale et aire - théorème des valeurs intermédiaires - calcul d'intégrale**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$.
On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction $f$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan. On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathcal{A}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) - (t-3)\,\mathrm{d}t$.

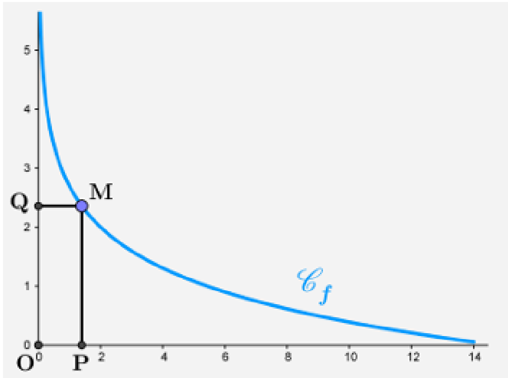



1. Justifier que, pour tout réel $t$ de $[0;+\infty[$, $f(t) - (t-3) > 0$.
2. Hachurer sur le graphique ci-contre le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
3. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
4. Pour tout réel $x \geq 0$, calculer $\mathcal{A}(x)$.
5. Existe-t-il une valeur de $x$ telle que $\mathcal{A}(x) = 2$ ?

---

**Logarithme et aire maximale d'un rectangle**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre :




À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- $f$ est-elle positive sur $]0;14]$ ?
- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante, quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$ ?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant. Justifier les réponses.

---

**Calculer une intégrale à l'aide d'un argument géométrique**

L'objectif de cet exercice est de calculer : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
2) Quelle conjecture peut-on faire concernant la courbe de la fonction $f$ ? Démontrer cette conjecture.
3) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

---

**Suite définie par une intégrale**
Soit un entier $n \geqslant 1$.

On note $f_n$ la fonction définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer $\mathrm{I}_1$.

2) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0;1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$

3) En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)$ est convergente et préciser sa limite.