Chapitre N°1 :

LIMITE ET CONTINUITÉ .

Niveau : 4 -ème secondaire

Section : sciences technique

Elaboré par : Mr .Lotfi Mestiri

Année scolaire : 2020-2021.

1) Rappel

Activité :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}(-x^3+x^2+1) = 0+0+1=1$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{1} \frac{x(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = \lim\limits_{1} x = 1$ $\quad \frac{0}{0}$ F.I

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^3}+1\right) = 0+1=1$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{+\infty} x = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-x = \lim\limits_{+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ $\quad +\infty - \infty$ F.I $\quad +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{1^+}\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{1^+}\sqrt{x-1} = 0$ 7) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2+1}{3-x} = -\infty$ $\quad 10 \quad 0^- \quad$ x: 3, 3 − x: + 0 −

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son monômes de plus haut degré .
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré .

Opérations sur les limites

a) Limite d'une somme :

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	+ ∞	+ ∞
l	− ∞	− ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞
− ∞	− ∞	− ∞
+ ∞	− ∞	Indéterminée

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
l≠0	∞	∞ (avec la R.S)
∞	∞	∞ (avec la R.S)
0	∞	Indéterminée

R.S = règle de signe

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	l' ≠ 0	$\frac{l}{l'}$
l	∞	0
∞	l'	∞ (avec la R.S)
∞	∞	Indéterminée
l	0	∞ (avec la R.S)
∞	0	∞ (avec la R.S)
0	0	Indéterminée

Fonction	Ensemble de définition	Limite en -∞	Limite en 0	Limite en +∞
x	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty\,;+\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty\,;+\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	0	$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[\,0\;;+\infty[$		0	$+\infty$
sin(x) cos(x)	$]-\infty\,;+\infty[$	N'existe pas	0 1	N'existe pas

N.B : Indéterminée désigne une forme indéterminée, pour laquelle une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

Activité :

1) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

2) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}} = \frac{3}{2}$

3) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin^2(x)}{x^2}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$

Rappel

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a\,x)}{x} = a$$

2) Limite et ordre

Activité 1 page 12:

a) Montrer que pour tout réel x on a $-x^2+2x-5<0$.

$a=-1; b=2; c=-5$

$\Delta = b^2-4ac = 4-20 = -16 < 0$ d'ou $-x^2+2x-5<0$

donc le signe de $-x^2+2x-5$

est celui le signe de $a=-1$

b) Calculer $\lim_{x\to -2} -x^2+2x+5$. $= -4-4+5 = -3 < 0$

c) Préciser $\lim_{x\to -2}|\underbrace{-x^2+2x+5}_{-3}|$. $= |-3| = 3 > 0$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 .

On Suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

- Si $f(x)\geq 0$ pour tout x de I , distinct de x_0 alors $\ell \geq 0$.
- Si $f(x)\leq 0$ pour tout x de I , distinct de x_0 alors $\ell \leq 0$.

Remarque : Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^+, x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$.

Activité 3 page 12 :

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I , , sauf peut-être en un réel x_0 .

On Suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$; $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I , différent de x_0 , $f(x)\leq g(x)$

Montrer que $\ell \leq \ell'$. (Indication : considère la fonction $h = f - g$).

....

....

....

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 .

On Suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$; $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$.

- Si $f(x)\leq g(x)$ pour tout x de I , distinct de x_0 alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque : Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Activité 4 page 13 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = x^2 \times cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . ...

1) Montrer que pour $x \neq 0$ on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ . ...

2) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? ....

....

....

Théorème

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 .

➢ Si $\begin{cases} h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I \text{, distinct de } x_0. \\ \quad\quad\quad\quad et \\ \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Activité 6 page 13

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I , , sauf peut-être en un réel x_0 de I et soit l un réel .

On Suppose que pour tout x de I , différent de x_0 on a $|f(x) - \ell| \leq |g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

a) Montrer que $\forall x \in I\backslash\{x_0\}, \ell - |g(x)| \leq f(x) \leq \ell + |g(x)|$.

b) Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

....

....

....

....

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 et soit ℓ un réel.

➢ Si $\begin{cases} |f(x) - \ell| \leq |g(x)| \text{ pour tout } x \text{ de } I \text{, distinct de } x_0. \\ \quad\quad et \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque : Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^+, x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Activité 7 page 14 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times sin\left(\frac{1}{2x}\right) + 3$. ....

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x) - 3| \leq |x|$ . ...

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ . ...

....

....

....

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel x_0 de I.

- Si $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I \text{, distinct de } x_0. \\ \quad et \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
- Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } I \text{, distinct de } x_0. \\ \quad et \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque : Le résultat du théorème reste vrai lorsque x tend vers x_0^+, x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$.

EXERCICE Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^3} - sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ . ...

2) f admet elle une limite en 0 ? ....

....

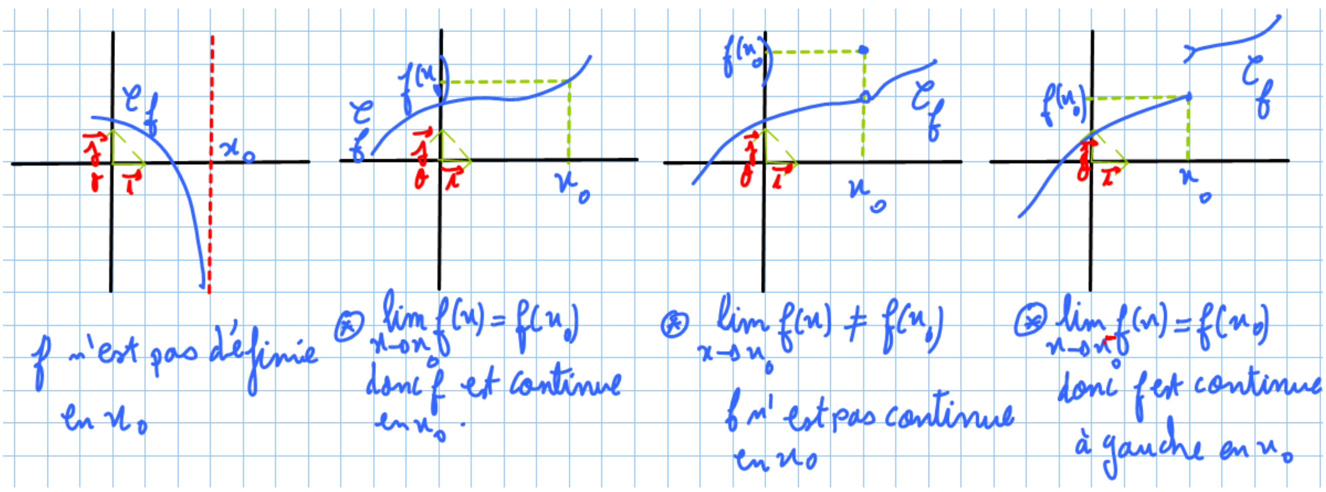
....

3) Limite et continuité d'une fonction

Rappel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 .

- f est continue en x_0 Ssi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est continue en x_0 Ssi f est continue à gauche et à droite en x_0 .



Prolongement par continuité

Activité 1 page 11 :

1) On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$, par $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+1}$.

a) Prouver que f est continue en tout réel différent de -1 .

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq -1 \\ 2 & si\ x = -1 \end{cases}$.

a) Montrer que $p(x) = x + 3$, pour tout réel x .

b) En déduire que p et continue en -1 .

3) Représenter graphiquement chacune des fonctions f et p dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition :

Soit I un intervalle contenant x_0 et soit f une fonction définie sur I sauf en x_0.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 , si elle est admet une limite finie ℓ en x_0 .
- La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & si\ x \in I \backslash \{x_0\} \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases}$ est appelée prolongement continu de f .

EXERCICE :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$. ……………………………………………………………………

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? ……………………………………………………………………………

………
………
………

4) Continuité sur un intervalle -Image d'un intervalle

Activité 1 page 19 .

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$. ……………………………………………………………………………

Déterminer l'ensemble de continuité de f . ……………………………………………………………………………

………
………
………

Définition :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.
- Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à gauche en b .
- Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à droite en a .
- Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b .
- Une fonction définie sur un intervalle $]a,+\infty[$ est dite continue sur $]a,+\infty[$ si elle est continue en tout réel de $]a,+\infty[$.
- Une fonction définie sur un intervalle $[a,+\infty[$ est dite continue sur $[a,+\infty[$ si elle est continue en tout réel de $]a,+\infty[$ et continue à droite en a .
- Une fonction définie sur un intervalle $]-\infty,a]$ est dite continue sur $]-\infty,a]$ si elle est continue en tout réel de $]-\infty,a[$ et continue à gauche en a .

Activité 2 page 19 .

Justifier chacune des affirmation suivantes : ………………………………………………………………

1) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. ………………………………………………………………

2) La fonction $x \mapsto \frac{3x^2+2x+1}{x+1}$ est continue sur $]-1,+\infty[$. ……………………………………………………………

3) La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$. ………………………………………………………………

………

Image d'un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On désigne par $f(I)$ l'ensemble des réels $f(x)$ tels que $x \in I$.

On note $f(I) = \{f(x), x \in I\}$

Activité :

La figure ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-1;+\infty[\backslash\{1\}$. C_f admet deux asymptote Verticales d'équation $x = 1$ et $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

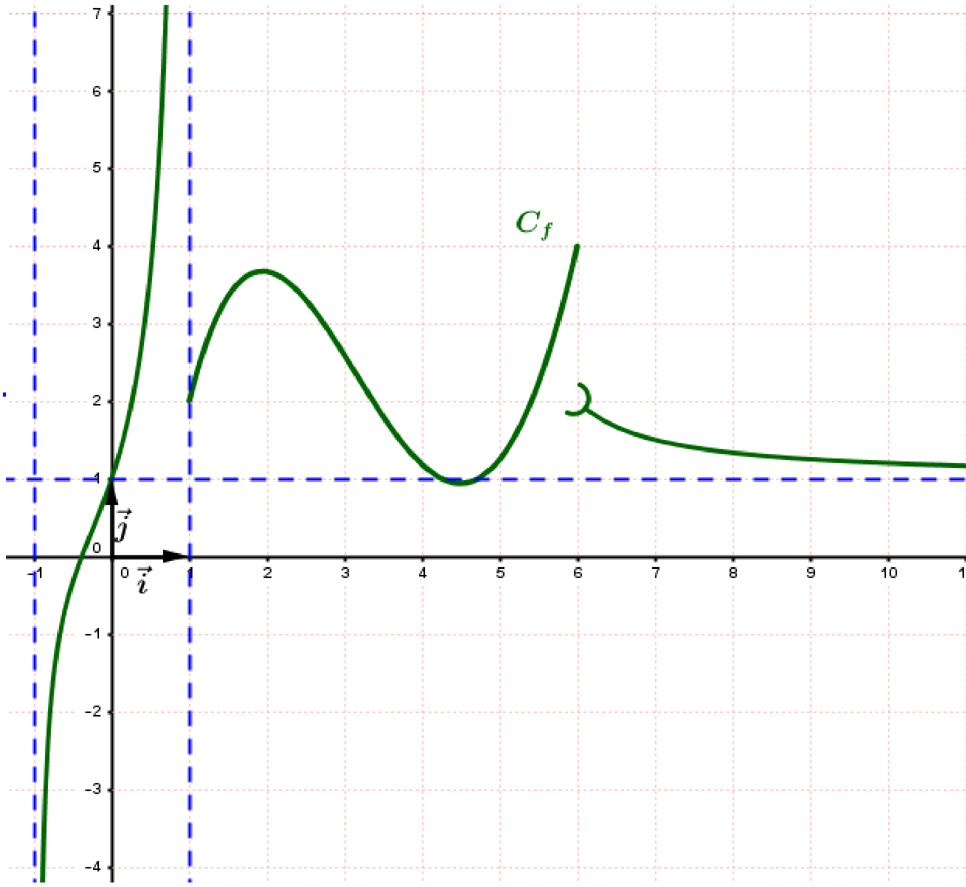
Par une lecture graphique déterminer :

$f([1;6]) =$ ....

$f(]6;+\infty[) =$ ....

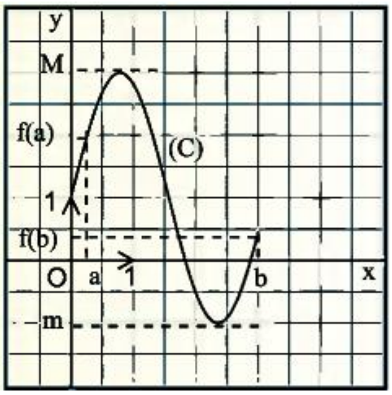
$f([0;1[) =$ ....

$f(]-1;1[) =$ ....



Théorème

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .
- L'image d'un intervalle fermé borné $[a;b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m;M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[a;b]$.



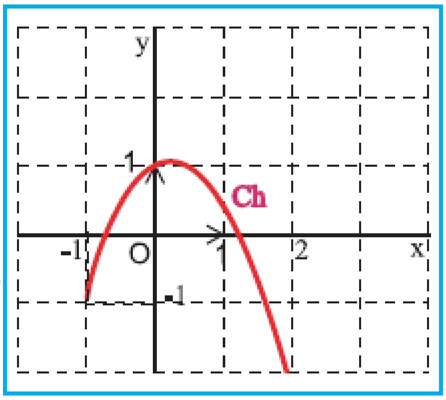
Exercice 13 page 31 .

13 Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = 2x-1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur [0, 2].
2) Déterminer l'image de [0, 2] par f.
3) Déterminer l'image de [0, +∞[par f.
4) Tracer, dans un repère orthonormé du plan la courbe C représentative de f.

Activité 1 page 21



Soit h la fonction définie sur $[-1,2]$ par $h(x)=\sqrt{x+1}-x^2$

et représentée dans le graphique ci-contre :

1) Justifier la continuité de la fonction h sur l'intervalle $[-1,2]$.

2) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $h(x) = 0$

3) a) Calculer $h\ (1)$ et $h\ (2)$ et justifier que 0 appartient a l'intervalle $h([1,2])$.

b) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ possède une solution α dans l'intervalle$]1,2[$

puis prouver que $1 < \alpha < 1,5$.

4) Montrer de même que $h(x) = 0$ possède une deuxième solution β dont on donnera

un encadrement d'amplitude $0,5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Soit a et b deux réel de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$

possède au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$

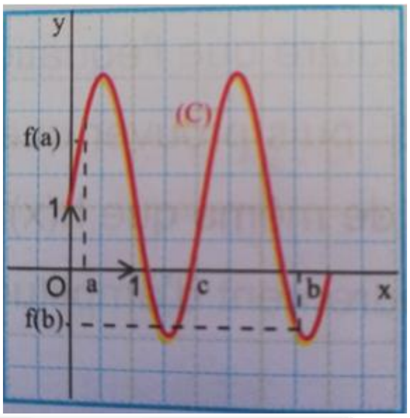
Commentaire :

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle ne présente ni trous ni sauts.

Corollaire :

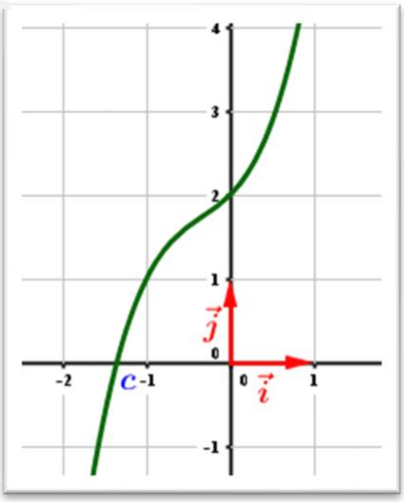
Si f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque : Ce corollaire indique que lorsque f est continue et change de signe sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses au moins une fois en un point d'abscisse appartenant à cet intervalle



Théorème.

Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe un réel unique $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.



Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,;1]$ une solution unique α .

b) A-t-on $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$ ou $\alpha \in [\frac{1}{2},1]$.

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………………

5) Limite et continuité d'une fonction composée

Définition :

Soient f et g deux fonction définies respective sur I et J telles que pour tout $x \in I$ *on a* $f(x) \in J$.

La fonction qui à tout réel x de I associe le réel $g(f(x))$ est appelée la composée de f par g .

On la note $g \circ f$, on lit « g *rond* f » et on écrit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\overset{f \circ g}{\longrightarrow}$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Activité:

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1) Donner l'expression de $(f \circ g)(x)$ . ...

2) a) Calculer de deux manières $(f \circ g)(4)$. ....

....

b) Calculer de deux manières $\lim\limits_{x \to 1}(f \circ g)(x)$ . ...

....

Théorème

Soient f et g deux définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$.

- Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \quad et \\ \lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell' \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0}(g \circ f)(x) = \ell'$. ($x$ tend vers x_0^+, x_0^- , $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ *fini ou infini*)
- $\begin{cases} f \text{ est continue en } x_0 \\ \quad et \\ g \text{ est continue en } f(x_0) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue en x_0

Activité 5 page 18

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. ....

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. ....

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$; comparer avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ . ...

c) Conclure . ...

....
....
....

Théorème

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]0; +\infty[$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty; 0[$ on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)-x^2$.

……

……

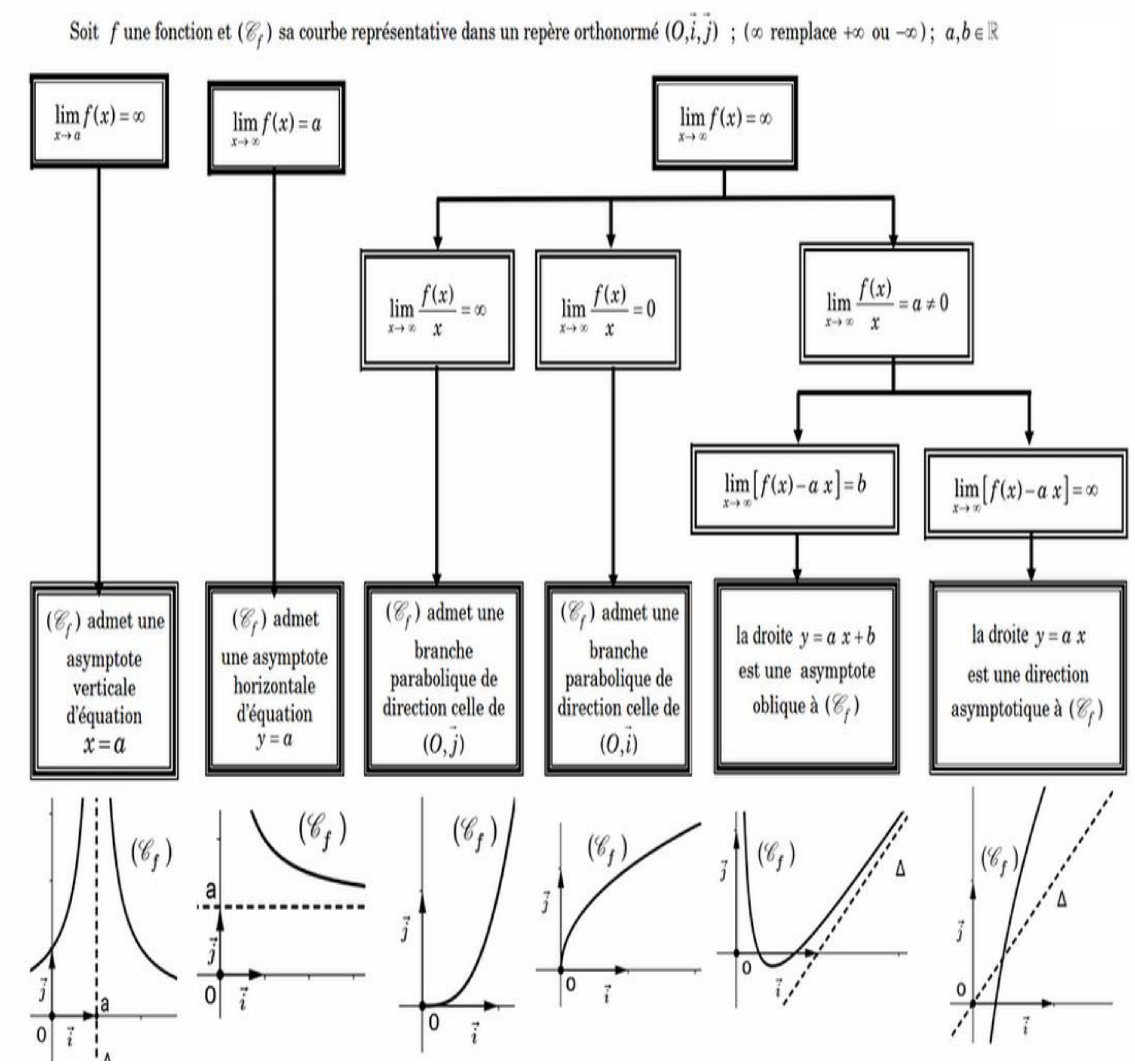
……

……

……

……

6) Limite et comportement asymptotique



Activité 4 page 26

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$.

a) Donner l'ensemble de définition et préciser le domaine de continuité de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$ on a : $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
b) Déterminer les asymptotes à la courbe representative $\mathscr{C}$de g.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, h(x) - x]$.

b) Montrer que la droite $D : y = x + 0.5$ est une asymptote oblique à la courbe représentative (C) de h au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier le comportement asymptotique de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

4) Soit k la fonction définie par $k(x) = x + \sqrt{x}$. Montrer que sa courbe representative admet une branche parabolique de direction la droite $D : y = x$ au voisinage de $+\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) & si\ x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} - 2x & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

1)soit $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

a) Montrer que $f(x) = (v \circ u)(x)$ *pour tout* $x < 0$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. interpréter graphiquement le résultat obtenu .

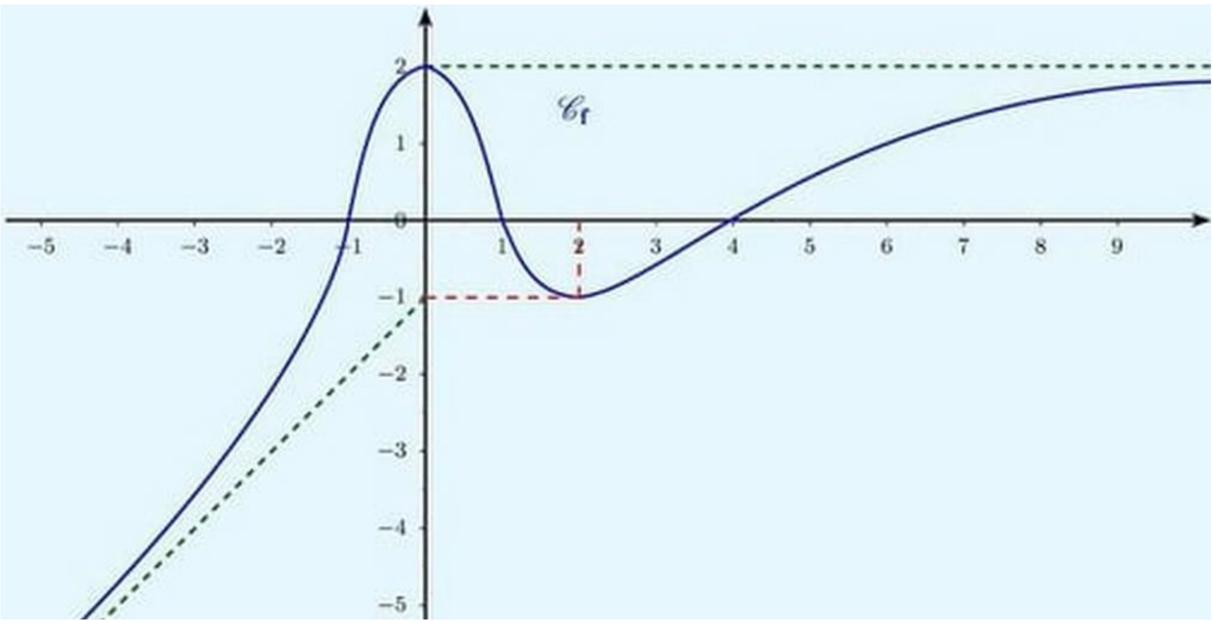
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x - \frac{1}{2}$. interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2)a) Montrer que pour tout $x < 0$ *on a* : $-2x^2 \leq f(x) \leq 0$.

b) Montrer que f est continue en 0 .

EXERCICE 2 :

Dans la figure ci-dessous $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d' une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$et une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $-\infty$.



1) Par une lecture graphique déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(f(x)-x+1)}{f(x)-x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(f(x)\pi)$.

c) $f(]-\infty;1[), f([-1,1]), f([2;+\infty[)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{3-x} - 2x$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g .

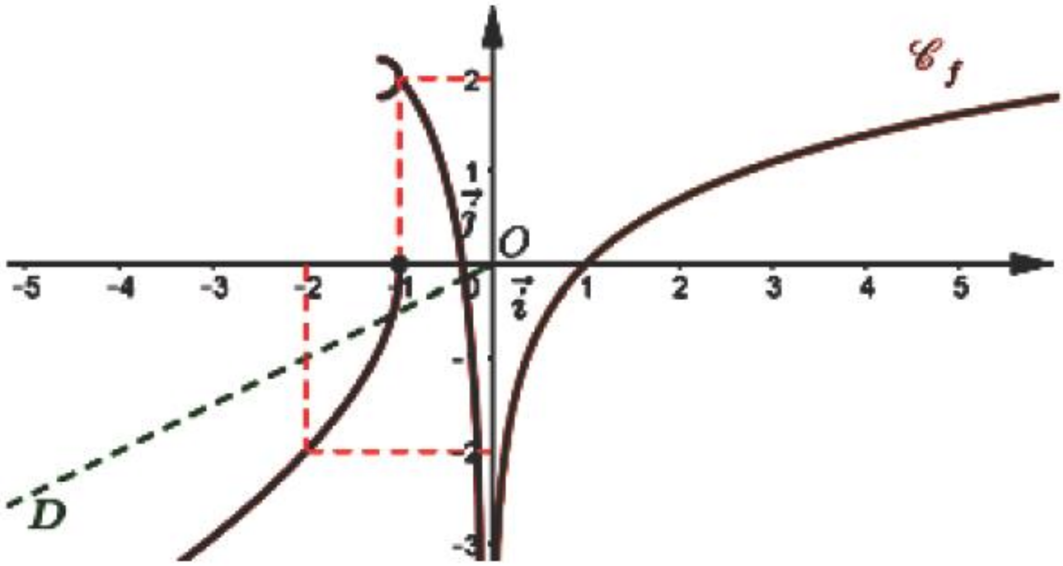
b) Déterminer $(g \circ f)(-1)$ et $\lim_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$.

3) Montrer que $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 :

Dans la figure ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$d'une fonction f . $\mathscr{C}_f$ admet :

- Une branche asymptotique de direction $D : y = \frac{1}{2}x$ au voisinage de $-\infty$.
- Une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- L'axe des ordonnées est une asymptote .



A l'aide du graphe :

1) Déterminer D_fl'ensemble de définition de la fonction f ainsi D_c son domaine de continuité .

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \to -\infty} [2f(x) - x]$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{(f \circ f)(x)}{x}$; $\lim_{x \to 0} f(x).sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

3) $f(\,]-1;0[\,)$; $f(\,]0;+\infty[\,)$.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x - cos(x)}{x-1} & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$.

a) Montrer que g est continue en 0 .

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\infty$.

c) Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq g(x) \leq 1$.

d) Déduire que la courbe de g admet une asymptote d'équation $y = 1$au voisinage de $-\infty$.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x+cos(\pi x)}{x-1} & si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2+3} - x & si\ x \geq 1 \end{cases}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x < 1$, $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat .

3) Montrer que f est continue en 1 .

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in \left]-\frac{1}{2} ; 0\right[$.

b) Montrer que $sin(\pi x) = -\sqrt{1-\alpha^2}$